確率型評価による最適ルート問題(不確実性の下での数理モデルの構築と最適化)

藤田, 敏治

数理解析研究所講究録
1194 巻 2001 年 135-142

確率型評価による最適ルート問題

九工大・工　　藤田 敏 治 (Toshiharu Fujita)

1　はじめに

確率型評価基準をもつ最適ルート問題を考える。通常の最短ルート問題では、グラフの各枝に距離やコストといった評価値が与えられ、ある節点から他のある節点までのあらゆるルートの中で、評価値の和を最小にするルートを見つけることが目的である。一方、ここで考える問題では、各枝上に所要時間が確率的に与えられているものとし、ある節点から他のある節点まで一定の時間内に到着する確率を最大にするルートを見つけることを目的とする。

この問題の評価関数は、閾値確率であるが、特性関数を利用することによりある種の期待値評価へと変換される。そして動的計画法 ([1],[5],[6]) によって再帰的解法を与える。この際、評価関数の性質からそのままでは再帰式を導くことができないため、不変埋没原理 ([2],[3],[4]) を適用し、新たにパラメータを導入した問題を考えることにより再帰式を導く。

2　確率型評価による最適ルート問題例

Figure 1 で表されるネットワークを考える。各枝上には、所要時間が Table 1 のように与えられているものとする。このとき、S から G へ向かうルートの中で、20 分以内に着く確率がもっとも大きいルートを求めたい。 S から G へ向かうルートをすべて挙げると $S \to A \to C \to G$,

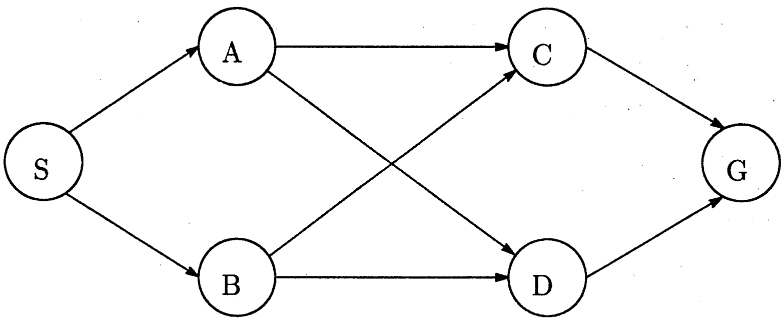

Figure 1: ネットワーク

$S \to A \to D \to G$, $S \to B \to C \to G$, $S \to B \to D \to G$ の 4 つであり、これらのルートに対し 20 分以内に着く確率を列挙法により求めることを考える。各ルートに対しては、通過する 3 本の枝上 3 通りづつの所要時間が与えられているので、一般に、計 $3^3 = 27$ 通りの所要時間が考えられる。たとえば、$S \to A \to C \to G$ に対して列挙したものが Table 2 である。20 分以内となるものについて、対応する確率を足し合わせると次を得る。

$$P[T(S,A) + T(A,C) + T(C,G) \leq 20] = 0.232$$

同様にして、

$$P[T(S,A) + T(A,D) + T(D,G) \leq 20] = 0.135$$

	時間 (分)	確率		時間 (分)	確率
$T(S,A)$	5	0.5	$T(S,B)$	6	0.3
$(S\to A)$	7	0.3	$(S\to B)$	7	0.6
	10	0.2		8	0.1
$T(A,C)$	8	0.6	$T(A,D)$	9	0.3
$(A\to C)$	10	0.2	$(A\to D)$	11	0.5
	12	0.2		13	0.2
$T(B,C)$	6	0.2	$T(B,D)$	7	0.5
$(B\to C)$	10	0.4	$(B\to D)$	10	0.2
	13	0.4		15	0.3
$T(C,G)$	4	0.2	$T(D,G)$	5	0.4
$(C\to G)$	5	0.2	$(D\to G)$	6	0.5
	8	0.6		10	0.1

Table 1: 各枝上の所要時間

$$P[T(S,B)+T(B,C)+T(C,G)\le 20]=0.140$$
$$P[T(S,B)+T(B,D)+T(D,G)\le 20]=0.425$$

が求められる。したがって、最適値 : 0.425、最適ルート : $S\to B\to D\to G$ を得る。

3 確率型評価による最適ルート問題の定式化

始点を S、終点を G とする有向グラフ (X,E) を考える。X は有限な節点集合、$E\subset X\times X$ は枝集合をそれぞれあらわすとし、各枝上には評価値が（離散型）確率変数 $T(x,y),(x,y)\in E$ で与えられているものとする。また簡単のため、始点から終点へのルートは常に一定数の節点を通過するとする。このとき、評価値の和がある一定の値 $M\in\mathbf{R}$ 以下になる確率を最大にするルートを求める問題は次のように定式化される。

問題 (P) Maximize $P[T(x_0,x_1)+T(x_1,x_2)+\cdots+T(x_{N-1},x_N)\le M]$

subject to $x_{n+1}\in X(x_n),\ \ n=0,1,\ldots,N-1$

ただし、

$$x_0=S,\ x_N=G,\ X(x)=\{y\in X\mid (x,y)\in E\}$$

とする。ここで、特性関数:

$$\chi_{[0,M]}(x)=\begin{cases}1 & (x\in[0,M])\\ 0 & (x\notin[0,M])\end{cases}$$

を導入することにより、目的関数は

$$\begin{aligned}
&P[T(x_0,x_1)+T(x_1,x_2)+\cdots+T(x_{N-1},x_N)\le M]\\
=&\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_N}\chi_{[0,M]}(t_{i_1}(x_0,x_1)+t_{i_2}(x_1,x_2)+\cdots+t_{i_N}(x_{N-1},x_N))\\
&\qquad\times\{p_{i_1}(x_0,x_1)\times p_{i_2}(x_1,x_2)\times\cdots\times p_{i_N}(x_{N-1},x_N)\}\\
=&E[\chi_{[0,M]}(T(x_0,x_1)+T(x_1,x_2)+\cdots+T(x_{N-1},x_N))]
\end{aligned}$$

$S \to A$	$A \to C$	$C \to G$	和	確率	20 以下?	20 以下の確率
5, 0.5	8, 0.6	4, 0.2	17	0.06	○	
		5, 0.2	18	0.06	○	
		8, 0.6	21	0.18	×	
	10, 0.2	4, 0.2	19	0.02	○	
		5, 0.2	20	0.02	○	
		8, 0.6	23	0.06	×	
	12, 0.2	4, 0.2	21	0.02	×	
		5, 0.2	22	0.02	×	
		8, 0.6	25	0.06	×	
7, 0.3	8, 0.6	4, 0.2	19	0.036	○	
		5, 0.2	20	0.036	○	
		8, 0.6	23	0.108	×	
	10, 0.2	4, 0.2	21	0.012	×	
		5, 0.2	22	0.012	×	0.232
		8, 0.6	25	0.036	×	
	12, 0.2	4, 0.2	23	0.012	×	
		5, 0.2	24	0.012	×	
		8, 0.6	27	0.036	×	
10, 0.2	8, 0.6	4, 0.2	22	0.024	×	
		5, 0.2	23	0.024	×	
		8, 0.6	26	0.072	×	
	10, 0.2	4, 0.2	24	0.008	×	
		5, 0.2	25	0.008	×	
		8, 0.6	28	0.024	×	
	12, 0.2	4, 0.2	26	0.008	×	
		5, 0.2	27	0.008	×	
		8, 0.6	30	0.024	×	

Table 2: $S \to A \to C \to G$ に対する確率の計算

とあらわせるので、問題 (P) は次の期待値最大化問題と同値になる。

問題 (P_0) $\quad$ Maximize $E[\chi_{[0,M]}(T(x_0,x_1)+T(x_1,x_2)+\cdots+T(x_{N-1},x_N))]$

subject to $\quad x_{n+1} \in X(x_n), \quad n = 0,1,\ldots,N-1$

次節以降、この問題 (P_0) に対し解法を考える。

4 再帰式

問題 (P_0) は、その目的関数の性質から単純に再帰的解法を導くことはできない。そこで、新たにパラメーター $\lambda \in \mathbf{R}$ を導入した次の埋め込み問題を考える。

問題 (P_{λ_0}) $\quad$ Maximize $E[\chi_{[0,M]}(\lambda_0+T(x_0,x_1)+T(x_1,x_2)+\cdots+T(x_{N-1},x_N))]$

subject to $\quad x_{n+1} \in X(x_n), \quad n = 0,1,\ldots,N-1$

ここで、$\lambda_0 = 0$ とおいたとき、問題 (P_0) と埋め込み問題 (P_{λ_0}) が同値であることは容易に確かめ

られる。すなわち、まず埋め込み問題 (P_{λ_0}) を解いた後、λ_0 に 0 を代入することによりもとの問題の最適解を求めることができるのである。

この埋め込み問題 (P_{λ_0}) に対し、次の部分問題群を考え、その最適値関数を w^n とおく。

$$\begin{aligned}
w^n(x_n;\lambda_n) &= \underset{\substack{x_{n+1}\in X(x_n)\\ x_{n+2}\in X(x_{n+1})\\ \vdots \\ x_N\in X(x_{N-1})}}{\mathrm{Max}} E[\chi_{[-\infty,M]}(\lambda_n + T(x_n,x_{n+1}) + \cdots + T(x_{N-1},x_N))] \qquad (n=0,1,\ldots,N-1)\\
w^N(x_N;\lambda_N) &= E[\chi_{[-\infty,M]}(\lambda_N)]
\end{aligned}$$

このとき、次の定理を得る。

Theorem 4.1

$$w^N(x_N;\lambda_N) = \begin{cases} 1 & \lambda_N \le M \\ 0 & M < \lambda_N \end{cases}$$

$$w^{n-1}(x_{n-1};\lambda_{n-1}) = \underset{x_n\in X(x_{n-1})}{\mathrm{Max}} \sum_i w^n(x_n;\lambda_{n-1}+t_i(x_{n-1},x_n)) \times p_i(x_{n-1},x_n)$$

$$(n=1,2,\ldots,N)$$

この再帰式を用いて、順に

$$w^N(G;\lambda_N) \to w^{N-1}(x_{N-1};\lambda_{N-1}) \to \ldots \to w^1(x_1;\lambda_1) \to w^0(S;\lambda_0)$$

と解いていけばよい。その際、各 $w^n(x_n;\lambda_n)$ $(n=0,1,2,\ldots,N-1)$ に対し、その最大値を与える節点を決定関数 $\pi_n^*(x_n;\lambda_n)$ であらわす。このとき、問題 (P_0) の最適値は $w^0(S;0)$ で与えられ、対応する最適ルート

$$x_0=S \to x_1 \to \cdots \to x_N=G$$

は、$\pi_n^*(x_n;\lambda_n)$ を用いて以下のように構成することができる。

$$\begin{aligned}
&x_0=S,\quad \lambda_0=0\\
&x_1=\pi_0^*(x_0;\lambda_0),\quad \lambda_1=\lambda_0+t_i(x_0,x_1)\\
&x_2=\pi_1^*(x_1;\lambda_1),\quad \lambda_2=\lambda_1+t_i(x_1,x_2)\\
&\quad\vdots\\
&x_{N-1}=\pi_{N-2}^*(x_{N-2};\lambda_{N-2}),\quad \lambda_{N-1}=\lambda_{N-2}+t_i(x_{N-2},x_{N-1})\\
&x_N=\pi_{N-1}^*(x_{N-1};\lambda_{N-1})
\end{aligned}$$

5 数値例

2節のネットワーク上で、S から G へ23分以内に到着する確率を最大にするルートを求める。問題は次のように表される。

$$\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & \sum_{i_0,i_1,i_2=1}^{3} [\chi_{[0,23]}(\lambda_0 + t_{i_0}(S,x_1) + t_{i_1}(x_1,x_2) + t_{i_2}(x_2,G))]\\
&\qquad \times p_{i_0}(S,x_1)\times p_{i_1}(x_1,x_2)\times p_{i_2}(x_2,G)\\
\text{subject to} \quad & x_1\in\{A,B\},\quad x_2\in\{C,D\}
\end{aligned}$$

Theorem 4.1 の再帰式を用いて、w^3 から順に求めていく。

$$w^3(G;\lambda_3) = E[\chi_{[-\infty,23]}(\lambda_3)] = \begin{cases} 1 & \lambda_3 \le 23 \\ 0 & \lambda_3 > 23 \end{cases}$$

次に

$$\begin{aligned} w^2(x_2;\lambda_2) &= \underset{x_3 \in X_3(x_2)}{\mathrm{Max}} \sum_i^3 w^3(x_3;\lambda_2 + t_i(x_2,x_3)) \times p_i(x_2,x_3) \\ &= \sum_i^3 w^3(x_3;\lambda_2 + t_i(x_2,G)) \times p_i(x_2,G) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} w^2(C;\lambda_2) &= \sum_{i_2}^3 w^3(G;\lambda_2 + t_{i_2}(C,G)) \times p_{i_2}(C,G) \\ &= w^3(G;\lambda_2+4) \times 0.2 + w^3(G;\lambda_2+5) \times 0.2 + w^3(G;\lambda_2+8) \times 0.6 \\ w^2(C;\lambda_2) &= \begin{cases} 1 & \lambda_2 \le 15 \\ 0.4 & 15 < \lambda_2 \le 18 \\ 0.2 & 18 < \lambda_2 \le 19 \\ 0 & 19 < \lambda_2 \end{cases} \\ \pi_2^*(C;\lambda_2) &= G \\ w^2(D;\lambda_2) &= \sum_{i_2} w^3(G;\lambda_2 + t_{i_2}(D,G)) \times p_{i_2}(D,G) \\ &= w^3(G;\lambda_2+5) \times 0.3 + w^3(G;\lambda_2+6) \times 0.5 + w^3(G;\lambda_2+7) \times 0.2 \\ w^2(D;\lambda_2) &= \begin{cases} 1 & \lambda_2 \le 16 \\ 0.8 & 16 < \lambda_2 \le 17 \\ 0.3 & 17 < \lambda_2 \le 18 \\ 0 & 18 < \lambda_2 \end{cases} \\ \pi_2^*(D;\lambda_2) &= G \end{aligned}$$

以下同様にして

$$w^1(A;\lambda_1) = \begin{cases} 1 & \lambda_1 \le 3 \\ 0.96 & 3 < \lambda_1 \le 4 \\ 0.88 & 4 < \lambda_1 \le 5 \\ 0.78 & 5 < \lambda_1 \le 6 \\ 0.72 & 6 < \lambda_1 \le 7 \\ 0.32 & 7 < \lambda_1 \le 8 \\ 0.28 & 8 < \lambda_1 \le 9 \\ 0.24 & 9 < \lambda_1 \le 10 \\ 0.12 & 10 < \lambda_1 \le 11 \\ 0 & 11 < \lambda_1 \end{cases} \qquad \pi_1^*(A;\lambda_1) = \begin{cases} C, D & \lambda_1 \le 3 \\ D & 3 < \lambda_1 \le 4 \\ C & 4 < \lambda_1 \end{cases}$$

$$w^1(B;\lambda_1) = \begin{cases} 1 & \lambda_1 \leq 1 \\ 0.94 & 1 < \lambda_1 \leq 2 \\ 0.79 & 2 < \lambda_1 \leq 3 \\ 0.76 & 3 < \lambda_1 \leq 4 \\ 0.70 & 4 < \lambda_1 \leq 6 \\ 0.62 & 6 < \lambda_1 \leq 7 \\ 0.42 & 7 < \lambda_1 \leq 8 \\ 0.30 & 8 < \lambda_1 \leq 9 \\ 0.24 & 9 < \lambda_1 \leq 10 \\ 0.09 & 10 < \lambda_1 \leq 11 \\ 0.08 & 11 < \lambda_1 \leq 12 \\ 0.04 & 12 < \lambda_1 \leq 13 \\ 0 & 13 < \lambda_1 \end{cases} \qquad \pi_1^*(B;\lambda_1) = \begin{cases} C, D & \lambda_1 \leq 1 \\ D & 1 < \lambda_1 \leq 3 \\ C & 3 < \lambda_1 \leq 4 \\ D & 4 < \lambda_1 \leq 11 \\ C & 11 < \lambda_1 \end{cases}$$

$$w^0(S;\lambda_0) = \begin{cases} 1 & \lambda_0 \leq -7 \\ 0.992 & -7 < \lambda_0 \leq -6 \\ 0.976 & -6 < \lambda_0 \leq -5 \\ 0.952 & -5 < \lambda_0 \leq -4 \\ 0.932 & -4 < \lambda_0 \leq -3 \\ 0.828 & -3 < \lambda_0 \leq -2 \\ 0.752 & -2 < \lambda_0 \leq -1 \\ 0.704 & -1 < \lambda_0 \leq 0 \\ 0.516 & 0 < \lambda_0 \leq 1 \\ 0.444 & 1 < \lambda_0 \leq 2 \\ 0.246 & 2 < \lambda_0 \leq 3 \\ 0.178 & 3 < \lambda_0 \leq 4 \\ 0.12 & 4 < \lambda_0 \leq 5 \\ 0.06 & 5 < \lambda_0 \leq 6 \\ 0.024 & 6 < \lambda_0 \leq 7 \\ 0 & 7 < \lambda_0 \end{cases} \qquad \pi_0^*(S;\lambda_0) = \begin{cases} A & \lambda_0 \leq 0 \\ B & 0 < \lambda_0 \leq 1 \\ A & 1 < \lambda_0 \leq 2 \\ B & 2 < \lambda_0 \leq 4 \\ A & 4 < \lambda_0 \leq 6 \\ B & 6 < \lambda_0 \leq 7 \end{cases}$$

を得る。したがって、最適値 (最大確率) は、λ_0 に 1 を代入して

$$w^0(S;0) = 0.704$$

となり、最適ルートを π_0^*, π_1^* から求めると

$$\begin{aligned} x_0 &= S \\ \lambda_0 &= 0 \\ x_1 &= \pi_0^*(x_1;\lambda_0) = \pi_0^*(S;0) = A \\ \lambda_1 &= \lambda_0 + t_i(S,A) \quad (i = 1,2,3) \\ x_2 &= \pi_1^*(A;\lambda_1) = \begin{cases} C & \lambda_1 = 5 \\ C & \lambda_1 = 7 \\ C & \lambda_1 = 10 \end{cases} \\ &= C \\ \lambda_2 &= \lambda_1 + t_i(A,C) \quad (i = 1,2,3) \\ x_3 &= \pi_2^*(C;\lambda_2) = G \end{aligned}$$

より、$S \to A \to C \to G$ となる。

6 再帰式の応用（制限時間の変更）

問題 (P_0) において、閾値 M を $M - \alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ へ変更した場合を考える。このとき、

$$
\begin{aligned}
& P[T(x_0, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_{N-1}, x_N) \leq M - \alpha] \\
= \; & P[\alpha + T(x_0, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_{N-1}, x_N) \leq M] \\
= \; & E[\chi_{[0,M]}(\alpha + T(x_0, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_{N-1}, x_N))]
\end{aligned}
$$

という関係が成り立つので、$M - \alpha$ 以内で到着する確率を最大にする問題：

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize } & E[\chi_{[0,M-\alpha]}(T(x_0, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_{N-1}, x_N))] \\
\text{subject to } & x_{n+1} \in X(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

は

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize } & E[\chi_{[0,M]}(\alpha + T(x_0, x_1) + T(x_1, x_2) + \cdots + T(x_{N-1}, x_N))] \\
\text{subject to } & x_{n+1} \in X(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

と同値になることがわかる。これは、問題 (P_{λ_0}) において $\lambda = \alpha$ とおいたものと同値な問題である。この事実は、一度 Theorem 4.1 で与えられる再帰式を計算しておけば、ネットワークに変更がない限り、再計算なしに任意の制限時間に対する解を求めることができることを意味する。

例 1) 20 分以内に到着したい場合（ $M - \alpha = 23 - 3$ ）

前節の結果を利用する。最大確率は、$\lambda_0 = \alpha = 3$ を代入して

$$w^0(S; \lambda_0) = w^0(S; 3) = 0.246$$

であり、そのときのルートは、

$$
\begin{aligned}
x_0 &= S \\
\lambda_0 &= 3 \\
x_1 &= \pi_0^*(x_0; \lambda_0) = \pi_0^*(S; 3) = B \\
\lambda_1 &= \lambda_0 + t_i(S, B) \quad (i = 1, 2, 3) \\
x_2 &= \pi_1^*(B; \lambda_1) = \begin{cases} D & \lambda_1 = 6 \\ D & \lambda_1 = 7 \\ D & \lambda_1 = 8 \end{cases} \\
&= D \\
\lambda_2 &= \lambda_1 + t_i(D, G) \quad (i = 1, 2, 3) \\
x_3 &= \pi_2^*(D; \lambda_2) = G
\end{aligned}
$$

より、$S \to B \to D \to G$ となる。

例 2）26 分以内に到着したい場合（$M-\alpha=23-(-3)$）

前節の結果を利用する。最大確率は、$\lambda=\alpha=-3$ を代入して

$$w^0(S;\lambda_0)=w^0(S;-3)=0.932$$

であり、そのときのルートを求めると、

$$\begin{aligned}
x_0 &= S \\
\lambda_0 &= -3 \\
x_1 &= \pi_0^*(x_0;\lambda_0)=\pi_0^*(S;-3)=A \\
\lambda_1 &= \lambda_0+t_i(S,A) \quad (i=1,2,3) \\
&= 2,3,7 \\
x_2 &= \pi_1^*(A;\lambda_1)=\begin{cases} C,D & \lambda_1=2 \ \ (\Leftrightarrow t_i(S,A)=5) \\ D & \lambda_1=4 \ \ (\Leftrightarrow t_i(S,A)=7) \\ C & \lambda_1=7 \ \ (\Leftrightarrow t_i(S,A)=10) \end{cases} \\
\lambda_2 &= \begin{cases} \lambda_1+t_i(A,C) & \lambda_1=2,7 \\ \lambda_1+t_i(A,D) & \lambda_1=2,4 \end{cases} \\
x_3 &= \left\{ \begin{array}{c} \pi_2^*(C;\lambda_2) \\ \pi_2^*(D;\lambda_2) \end{array} \right\} = G
\end{aligned}$$

結果、この場合、2 通りの最適ルートを得る。この意味は

$$\begin{cases} t_i(S,A)=5 \text{ or } 10 \text{ のとき} & S\to A\to C\to G \\ t_i(S,A)=5 \text{ or } 7 \text{ のとき} & S\to A\to D\to G \end{cases}$$

である。すなわち S から A に至るまでに実際にかかった時間を考慮し、その後のルートを選択する必要がある。このようにダイナミックに経路を選択していく形で最適ルートが得られることは興味深い。実際、評価の性質から考えても、一般には、途中でそれまでの経過を考慮して経路を選択していくほうが妥当であることは明らかである。このような解は、単純な列挙法では得られず、今回の再帰式による解法の有用性を示している。

References

[1] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, NJ: Princeton Univ. Press, 1957.

[2] R.E. Bellman and E.D. Denman, *Invariant Imbedding*, Lecture Notes in Operation Research and Mathematical Systems, Vol.52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[3] S. Iwamoto, Associative dynamic programs, J. Math. Anal. Appl. **201**(1996), No.1, 195-211.

[4] S. Iwamoto, K. Tsurusaki and T. Fujita, On Markov Policies for Minimax Decision Processes, J. Math. Anal. Appl., to appear

[5] M.L. Puterman, *Markov Decision Processes : discrete stochastic dynamic programming*, New York: Wiley & Sons, 1994.

[6] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, New York: Marcel Dekker, 1992.